

Versnelling voetgangersbrug

Betonnen voetgangersbruggen worden steeds slanker gerealiseerd, onder meer vanwege esthetische eisen of door het toepassen van materialen met een hoge sterkte en duurzaamheid. Bij een slanke brug neemt de eigenfrequentie af. Hierdoor kan de comforteis met betrekking tot de trillingen van het brugdek maatgevend worden boven de sterkte-eis. Aan de hand van een case wordt uitgelegd hoe de trillingen in de drie verschillende richtingen (longitudinaal, verticaal en lateraal) worden getoetst.

Case

Om de trillingen te beperken, wordt een eis gesteld aan de versnelling. Om toe te lichten hoe, wordt een voetgangersbrug beschouwd waarvan de versnelling in longitudinale, laterale en verticale richting wordt beoordeeld. De sterkte en bruikbaarheid worden buiten beschouwing gelaten. Voor de brug worden onderstaande gegevens aangehouden.

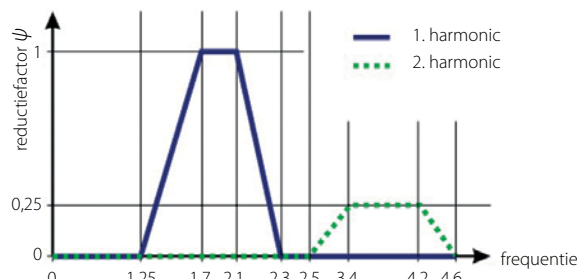
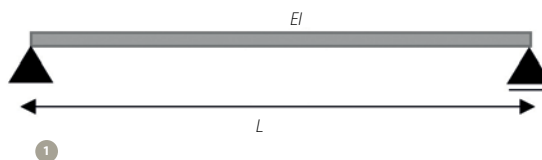
Rubriek Rekenen in de praktijk

Dit is de tweede aflevering in de Cement-rubriek 'Rekenen in de praktijk'. Hierin staat telkens één rekenopgave uit de praktijk centraal. De rubriek wordt samengesteld door een werkgroep, bestaande uit: Mustapha Attahiri (Ingenieursbureau Gemeente Rotterdam), Gökhan Dilsiz (Arup), Maartje Dijk (Witteveen+Bos), Jorrit van Ingen (Bartels Ingenieurs voor Bouw & Infra), Jacques Linssen (redactie Cement), Bart Vosslamber (Heijmans) en Bas Wijnbeld (ABT).

Uitgangspunten

Overspanning	$L = 14,0 \text{ m}$
Breedte	$B = 2,0 \text{ m}$
Dikte	$H = 0,38 \text{ m}$
Oppervlakte	$A = 0,76 \text{ m}^2$
Traagheidsmoment	$I_y = 0,009 \text{ m}^3$ en $I_z = 0,253 \text{ m}^3$
Betonkwaliteit	C55/67
Elasticiteitsmodulus	$E_{\text{ongescheurd}} = 38.000 \text{ N/mm}^2$
Soortelijke massa beton	$\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$
Voorspangraad	100% (géén betontrekspanning aanwezig)
Oplegsysteem	Scharnierend
Verkeersklasse	klasse 3 (conform nationale bijlage van Eurocode 0)
Verkeersintensiteit	$VI = 0,5 \text{ personen/m}^2$ (verkeersklasse TC3)
Comfortklasse	2
Max. toegestane versnelling	$0,7 \text{ m/s}^2$ in verticale richting $0,2 \text{ m/s}^2$ in longitudinale en laterale richting
Dempingsverhouding	$\xi = 0,01$ (voorgespannen beton)

- 1 Schematisering voetgangersbrug
- 2 Reductiefactor ψ voor de verticale en longitudinale richting bij verschillende frequenties van de constructie
- 3 Reductiefactor ψ voor de laterale richting bij verschillende frequenties van de constructie
- 4 C-waarde voor drie natuurlijke frequenties en drie verschillende opleggingen



Uitwerking longitudinale richting

De maximale versnelling hoeft alleen te worden bekeken als de eigenfrequentie van het systeem zich in een bepaald kritisch gebied bevindt. Dit gebied is: $1,25 \leq f_e \leq 4,6$ Hz (fig. 2). Daarom moet eerst de eigenfrequentie worden bepaald.

De eigenfrequentie van het brugdek in longitudinale richting kan worden gevonden met behulp van de theoretische vergelijking:

$$f_{\text{lo,n}} = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{L}$$

waarin:

- $f_{\text{lo,n}}$ is eigenfrequentie in longitudinale richting [Hz]
- E is elasticiteitsmodulus beton [N/m²]
- ρ is soortelijke massa beton [kg/m³]
- L is lengte van de overspanning [m]

In figuur 2 wordt de reductiefactor ψ voor de verticale en longitudinale richting bij verschillende frequenties van de constructie weergegeven. Bij $1,25 \leq f_e \leq 2,3$ en $2,5 \leq f_e \leq 4,6$ Hz is $\psi = 0$ en hoeft de versnelling niet te worden gecontroleerd.

Hieruit volgt een eigenfrequentie in longitudinale richting van:

$$f_{\text{lo,n}} = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{\frac{38000 \cdot 10^6}{2500}} \frac{1}{14} = 139,24 \text{ Hz}$$

Deze frequentie valt dus buiten het kritische gebied. Er hoeft dus geen toets op comfort te worden uitgevoerd in deze richting.

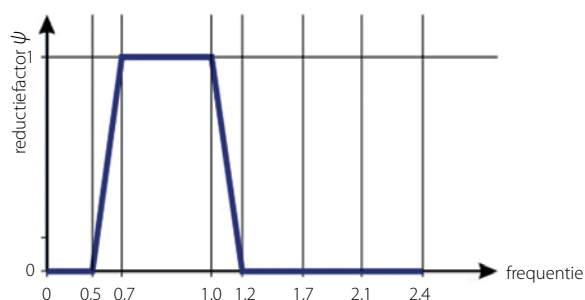
Uitwerking laterale richting

Ook voor de laterale richting geldt dat toetsing van de versnelling alleen nodig is als de eigenfrequentie zich in een bepaald gebied bevindt. Dit gebied is: $0,5 \leq f_e \leq 1,2$ (fig. 3).

De berekening van de eigenfrequentie berust op de theoretische vergelijking:

$$f_{\text{la}} = \frac{1}{2\pi} C \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

2



3

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
 $C = 3,52$	 $C = 22,4$	 $C = 61,7$
 $C = 9,87$	 $C = 39,5$	 $C = 88,9$
 $C = 121,0$	 $C = 61,7$	 $C = 121,0$

4

waarin:

- f_{la} is eigenfrequentie in laterale richting [Hz]
- C is 9,87 (scharnierend opgelegd systeem en $n = 1$ [-] (fig. 4)
- E is elasticiteitsmodulus beton [N/m²]
- I is oppervlaktetraagheidsmoment doorsnede in laterale richting [m⁴]
- ρ is soortelijke massa beton [kg/m³]
- A is oppervlakte doorsnede [m²]
- L is lengte van de overspanning [m]

Hieruit volgt een eigenfrequentie in laterale richting van:

$$f_{la} = \frac{1}{2\pi} \cdot 9,87 \cdot \sqrt{\frac{38000 \cdot 10^6 \cdot 0,253}{2500 \cdot 0,76 \cdot 14^4}} = 18,04 \text{ Hz}$$

In laterale richting blijkt ook dat het maken van een comfortberekening buiten beschouwing kan worden gelaten, want de berekende eigenfrequenties vallen buiten het kritische gebied ($0,5 \leq f_e \leq 1,2$ Hz).

Overigens is het niet noodzakelijk het verschijnsel van lock-in te toetsen, aangezien de eigenfrequentie $\geq 2,5$ Hz.

In figuur 3 wordt de reductiefactor ψ gegeven voor de laterale richting bij verschillende frequenties van de constructie. Bij $0,5 \leq f_e \leq 1,2$ Hz is $\psi = 0$ en hoeft de versnelling niet te worden gecontroleerd.

Uitwerking in verticale richting

Ook voor de verticale richting geldt dat eerst de eigenfrequentie van het systeem moet worden bepaald. Alleen als deze in het kritische gebied $1,25 \leq f_e \leq 2,3$ en $2,5 \leq f_e \leq 4,6$ Hz bevindt, is toetsing van de versnelling nodig. De eigenfrequentie wordt berekend met behulp van onderstaande vergelijking. Deze vergelijking is gebaseerd op een één-massa-veersysteem 'single-degree-of-freedom-system' (SDOF).

$$f_e = \frac{1}{2\pi} C \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$$

In deze formule staat ρA voor de permanent aanwezige massa. Hieruit volgt een eigenfrequentie in verticale richting van:

$$f_e = \frac{1}{2\pi} \cdot 9,87 \cdot \sqrt{\frac{38000 \cdot 10^6 \cdot 0,009}{2500 \cdot 0,76 \cdot 14^4}} = 3,43 \text{ Hz}$$

Deze waarde ligt in het kritische gebied ($1,25 \leq f_e \leq 4,6$), dus de maximale versnelling moet worden berekend en getoetst aan de maximaal toelaatbare brugdekversnelling in verticale richting ($a \leq 0,7$ m/s²).

Toetsing versnelling

De toetsing van de verticale versnelling kan worden berekend aan de hand van de formule:

$$a_{\max} = \frac{P^*}{m^*} \frac{1}{2\xi} \psi$$

waarin:

- a_{\max} is optredende versnelling van het brugdek [m/s²]
- P^* is gegeneraliseerde modale belasting [N]
- m^* is gegeneraliseerde modale massa [kg]
- ξ is dempingsverhouding [-]

ψ is reductiefactor voor de kans dat de stapfrequentie van de voetganger het kritische gebied van de eigenfrequentie nadert [-]

Om de versnelling te berekenen, moeten dus eerst de modale massa (gegeneraliseerde massa) en de modale belasting (gegeneraliseerde belasting) worden bepaald.

Gegeneraliseerde modale belasting

De generaliseerde modale belasting kan worden berekend met behulp van de belasting van één voetganger, vermenigvuldigd met het equivalent aantal voetgangers. Hier moet dus het equivalent aantal voetgangers worden bepaald.

Equivalent aantal voetgangers (n') voor VK 1 t/m 3 (VI < 1,0 personen/m²) is:

$$n' = \frac{10,8 \sqrt{\xi n}}{S}$$

waarin:

- n' is equivalent aantal voetgangers op het belaste oppervlakte S [1/m²]
- ξ is dempingsverhouding [-]
- n is aantal voetgangers op het belaste oppervlak (= $S \times VI$) [-]
- VI is verkeersintensiteit [personen/m²]
- S is oppervlakte van het brugdek dat wordt belast (= $L \times b$) [m²]
- L is overspanning [m]
- b is breedte van het brugdek [m]

Hieruit volgt een equivalent aantal voetgangers:

$$n' = \frac{10,8 \cdot \sqrt{0,01 \cdot 14}}{28} = 0,144 \text{ personen/m}^2$$

Ofwel $n = n' \times S = 4,04$ personen over het totale oppervlak. Ook hierbij geldt dat de modale belasting een bepaald percentage is van de belasting, net zoals bij de modale massa, afhankelijk van de eigentrilvorm. Voor de modale belasting wordt

factor_{modbel}: $\frac{2}{\pi}$ toegepast. Voor één voetganger moet een

puntlast van 280 N in rekening worden gebracht.

De modale belasting is $P^* = \text{factor}_{\text{modbel}} \times n \times P_{\text{voetganger}}$

$$\frac{2}{\pi} \cdot 4,04 \cdot 280 = 720,32 \text{ N}$$

Modale massa

De modale massa bestaat uit de massa van het brugdek en de massa van de personen op de brug.

Belasting brugdek $q = 0,76 \text{ m}^2 \times 25 \text{ kN/m}^3 = 19,0 \text{ kN/m}$

Voetgangersbelasting: $q = \frac{m_{\text{voetganger}} V I S}{L}$

Met een gemiddelde massa van het lichaam van 74,4 kg (Duitse volkstelling van 2004) [1] wordt dit:

$$\text{Voetgangersbelasting: } q = \frac{0,744 \cdot 0,5 \cdot 28}{14} = 0,744 \text{ kN/m}$$

Omdat het aandeel van de voetgangers kleiner is dan 5% van de massa van het brugdek (namelijk 3,9%), voegt de massa van de voetgangers niet veel toe ten opzichte van de massa van de constructie. Daarom kan de massa van de voetgangers worden verwaarloosd.

De modale massa is een bepaald percentage van de totale massa. Dit percentage hangt af van de eigentrilvorm van de constructie. De eigentrilvorm bij een scharnierend opgelegd systeem is factor $\text{modmas} = 0,5$ (50%).

Dit geeft een modale massa (m^*) van:

$$m^* = 0,5 \times 19 \text{ kN/m} \times 14 \text{ m} = 140 \text{ kN} = 13.300 \text{ kg}$$

Reductiefactor voor de brugdekversnelling

De versnelling moet nog worden gereduceerd met een factor ψ voor de brugdekversnelling. Deze factor is afhankelijk van de eigenfrequentie van het systeem. Deze factor kan ook in rekening worden gebracht bij het bepalen van de belasting, maar dat komt op hetzelfde neer.

$$\psi = 0,25 \text{ (25\%)} \text{ bij } f_e = 3,428 \text{ Hz (conform figuur 2)}$$

Optredende versnelling

Met de berekende modale massa, modale belasting, de dempingsverhouding en de reductiefactor kan de optredende versnelling van het brugdek worden bepaald, volgens:

$$a_{\text{max}} = \frac{P^*}{m^*} \frac{1}{2\xi} \psi = \frac{720,32}{13300} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,01} \cdot 0,25 = 0,677 \text{ m/s}^2$$

De optredende versnelling van $a_{\text{max}} = 0,677 \text{ m/s}^2 \leq 0,7 \text{ m/s}^2$, dus voldoet.

Theorie

Meer achtergrondinformatie over het berekenen van comfort van voetgangersbruggen staat in het artikel 'Comfort van voetgangersbruggen', elders in dit nummer. Daarin worden de belangrijkste eisen, belastingen en formules, die ook in dit artikel terugkomen, uitgelegd.

Conclusie

De eigenfrequentie in longitudinale en laterale richting vallen beide buiten het kritische gebied en voldoen dus. De eigenfrequentie in verticale richting valt wel binnen het kritische gebied, waardoor de maximale versnelling moet worden getoetst. Ook die blijkt te voldoen. ☒

LITERATUUR

- 1 EUR 23984 EN: Design of lightweight footbridges for human induced vibrations.
- 2 NEN-EN 1990+A1+A1/C2:2011/NB:2011, artikel A.2.4.3.2. h.

Vervolgartikelen

In twee toekomstige afleveringen in deze rubriek worden de volgende onderwerpen behandeld:

- Joggersbelasting
- Vandalismebelasting